**ＩＢ　解析特論（$Fourier$ 変換）　講義報告**[1]

２００８年1月１９日（土）　１４：００－１６：００

前期の終わりで、$\mathbb{R}$ 上で定義された複素数値関数 $f$ の $Fourier$ 変換

$$\mathfrak{F}(f)(y) = \hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp(-\sqrt{-1}yx)|dx| \quad \text{for } \forall y \in \mathbb{R}$$

を定義し、$Fourier$ 変換の基本的な性質について調べた。今回は、急減少関数を定義し、急減少関数の空間の構造について扱った。また、急減少関数の空間に一つのノルムを入れた。

# 1　急減少関数のクラス

## 1.1　急減少関数の定義

**定義 1.1 (急減少関数).** $\mathbb{R}$ 上の複素数値関数 $f$ が次の性質を満たすとき、$f$ を**急減少関数**といい、急減少関数の全体を $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ と記す。

1. $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$
2. $\forall(m,n) \in \mathbb{N}_2$ に対して、$\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} x^m (D^n f)(x) = 0$ が成立する。

**練習問題 1.1.**

1. $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow f + g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$
2. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$
3. $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

急減少関数の全体 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ は、$\mathbb{C}$ 上の代数になる。

## 1.2　$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ の構造

**補題 1.1.**

1. $\mathbb{R}$ 上の複素数値連続関数 $f$ が $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ を満たすとき、$|f(x_0)| = \displaystyle\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ を満たす $x_0 \in \mathbb{R}$ が存在する。
2. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty$
3. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow D^k f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

**補題 1.2.** $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上の多項式関数全体とするとき、

[1]数学工房　http://www.sugakukobo.com/

*1.* $\forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \forall p \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ に対して、$\lim_{x \to \pm\infty} |p(x)g(x)| = 0$ が成立する。

*2.* $\forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \forall p \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ ならば、$pg \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

**定理 1.1.** $\forall (m,n) \in \mathbb{N}_0^2$ について

$$\eta_{mn}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (1+x^2)^{\frac{m}{2}} |(D^n f)(x)| \quad for\ \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

とするとき、$\eta_{m,n}$ は $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ のひとつのノルムである。

記録　J.S